



TITLE:

# 波動方程式に関係したFourier Multiplierについて (実解析的手法によるHardy空間と多変数フーリエ解析の研究)

AUTHOR(S):

宮地, 晶彦

---

CITATION:

宮地, 晶彦. 波動方程式に関係したFourier Multiplierについて (実解析的手法によるHardy空間と多変数フーリエ解析の研究). 数理解析研究所講究録 1980, 383: 95-112

ISSUE DATE:

1980-04

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/104842>

RIGHT:

波動方程式に関係した Fourier multiplier について

東大 理 宮地晶彦

## § 1. 序

波動方程式

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u, & t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n \\ u(0, x) = f(x), & x \in \mathbb{R}^n \\ \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = g(x), & x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

の解  $u$  を,  $t$  を固定して  $(f, g) \mapsto u(t, \cdot)$  という写像と考  
えて, この写像が  $\mathbb{R}^n$  上のどの関数空間からどの関数空間へ  
の連続写像になるか, という問題が与えられたとしよう。フ  
ーリエ変換を用いると, 解  $u$  は

$$u(t, \cdot) = \mathcal{F}^{-1}(\cos t|\xi| \mathcal{F}f(\xi)) + \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{\sin t|\xi|}{|\xi|} \mathcal{F}g(\xi)\right)$$

と書ける。従って, 取おうとする写像は,

$$(1) \quad f \mapsto \mathcal{F}^{-1}(m(\xi) \mathcal{F}f(\xi))$$

という形で,

$$m(\xi) = \cos t|\xi| \sim \frac{\sin t|\xi|}{|\xi|}$$

である。もし関数空間としてソボレフ空間

$$W^{p,s} = \{f \in \mathcal{S}' \mid \mathcal{F}^{-1}((1+|\xi|^2)^{s/2} \mathcal{F}f(\xi)) \in L^p\}$$

$$\|f\|_{W^{p,s}} = \|\mathcal{F}^{-1}((1+|\xi|^2)^{s/2} \mathcal{F}f(\xi))\|_{L^p}$$

のようなものにとり, たとえば  $g(x) \equiv 0$  として, 有界性

$$\|u(t, \cdot)\|_{W^{q,r}} \leq C \|f\|_{W^{p,s}}$$

が成り立つか, という場合には, 上の不等式は

$$\mathcal{F}^{-1}((1+|\xi|^2)^{s/2} \mathcal{F}f(\xi)) = h$$

と書きかえてみれば

$$\|\mathcal{F}^{-1}((1+|\xi|^2)^{\frac{r-s}{2}} \cos t|\xi| \mathcal{F}h(\xi))\|_{L^q} \leq C \|h\|_{L^p}$$

と同じであるから,

$$m(\xi) = (1+|\xi|^2)^{\frac{r-s}{2}} \cos t|\xi|$$

に対する (1) の作用素の  $L^p$ - $L^q$  有界性を問うのと同じである。

$\varepsilon = \varepsilon'$ , 一般に  $\varepsilon$  を実数として

$$m(z) = (1+|z|^2)^{-\varepsilon/2} e^{\pm i|z|}$$

とすれば都合がよいであろう。今

$$\psi(z) = 0 \text{ for } |z| \leq 1, \quad \psi(z) = 1 \text{ for } |z| \geq 2$$

となるような有界関数  $\psi$  をとると,

$$\begin{aligned} & \mathcal{F}^{-1} \left( (1+|z|^2)^{-\varepsilon/2} e^{\pm i|z|} \mathcal{F}f(z) \right) \\ &= \mathcal{F}^{-1} \left( \psi(z) (1+|z|^2)^{-\varepsilon/2} e^{\pm i|z|} \mathcal{F}f(z) \right) \\ &+ \mathcal{F}^{-1} \left( (1-\psi(z)) (1+|z|^2)^{-\varepsilon/2} e^{\pm i|z|} \mathcal{F}f(z) \right) \end{aligned}$$

と令ければ, 右辺第2項は  $\delta$  (急減少関数) の関数とすとの合成積だからほとんど問題はないであろう。更に  $(1+|z|^2)^{-\varepsilon/2}$  という因子を  $|z|^{-\varepsilon}$  に置きかえてしまっても,

$$f \mapsto \mathcal{F}^{-1} \left( \psi(z) (1+|z|^2)^{-\varepsilon/2} |z|^{\varepsilon} \mathcal{F}f(z) \right)$$

$$f \mapsto \mathcal{F}^{-1} \left( \psi(z) (1+|z|^2)^{\varepsilon/2} |z|^{-\varepsilon} \mathcal{F}f(z) \right)$$

はどちらも  $L^p$  や リプシッツ空間  $\Lambda_\alpha$  などでは有界作用素であるから, 問題はかわらないであろう。

結局以上のような理由から,

$$m(z) = \psi(z) |z|^{-\alpha} e^{i\alpha \arg z}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

なる  $m(z)$  によって作用素 (1) を考えることにしよう。考える関数空間は  $H^p$  ( $0 < p \leq 1$ ),  $L^p$  ( $1 < p < \infty$ ), BMO および  $\Lambda_\alpha$  ( $\alpha \in \mathbb{R}$ ) である。  $H^p$  は Fefferman-Stein [3] によって与えられる。以後は,  $1 < p < \infty$  に対しては,  $H^p = L^p$  として  $H^p, L^p$  両方の記号を混用する。ただし  $H^1$  と  $L^1$  は異なる関数空間であることに注意!。BMO は John-Nirenberg [4] の空間で, ノルム (正確にはセミノルム) は

$$\|f\|_{\text{BMO}} = \sup_{I: \text{cube}} \inf_{c \in \mathbb{C}} \frac{1}{|I|} \int_I |f(x) - c| dx$$

である。  $\Lambda_\alpha$  ( $\alpha \in \mathbb{R}$ ) は Taibleson [11] によって与えられるリプシッツ空間  $\Lambda(\alpha; \infty, \infty)$  である。これらの関数空間を次のように並べることにする:

$$X_p = \begin{cases} \Lambda_{-np} & p < 0 \\ \text{BMO} & p = 0 \\ H^{1/p} & p > 0. \end{cases}$$

更に, 必要に応じて  $L^1, L^\infty$  および  $C^k$  ( $k \in \mathbb{Z}, k > 0$ ) も考えよう。ここで  $C^k$  は  $k$  回連続微分可能な関数で  $k$  回微分まで込めて有界であるものの全体のつくる線型空間で, ノルム

は,

$$\|f\|_{C^k} = \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha f\|_{L^\infty}$$

を入れる。

次の記号を用いる。(1) の作用素を簡単に  $[m(z)]$  と書く:

$$[m(z)]: f \mapsto \bar{z}^{-1} (m(z) f(z)).$$

$t \in \mathbb{R}$  に対して,

$$S_t = [\psi(z) |z|^{-t} e^{i|z|}],$$

$$K_t = \bar{z}^{-1} (\psi(z) |z|^{-t} e^{i|z|}) (\in \mathcal{S}').$$

$$S_t f = K_t * f \quad \text{である.}$$

さてこれから, すべて  $t \in \mathbb{R}$  について,  $S_t$  が  $X_p \rightarrow X_\sigma$  の有界作用素となる組  $(p, \sigma)$  を完全に決定しよう。

§ 2.  $S_t: X_p \rightarrow X_\sigma$  の有界性, ただし  $p \geq 0$ .

$p \geq 0$  の範囲では,

$$D_t = \{(p, \sigma) \mid p \geq 0, S_t: X_p \rightarrow X_\sigma \text{ 有界}\}$$

は次のようになる:  $t < 0$  の時  $D_t = \emptyset$ ,  $t \geq 0$  の時は, 図 1, 2, 3 の斜線部。

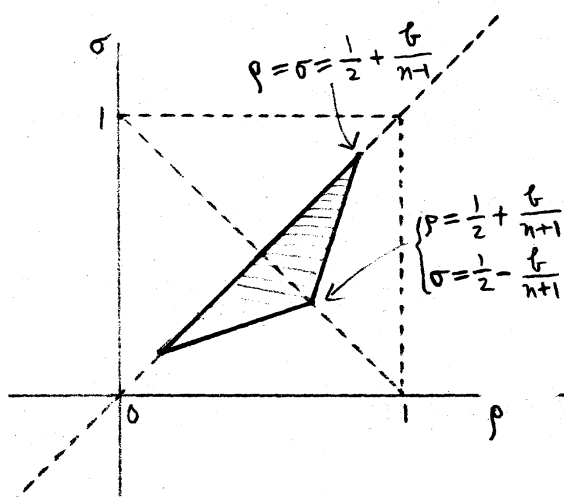


図1.  $0 \leq t \leq \frac{n-1}{2}$  のとき

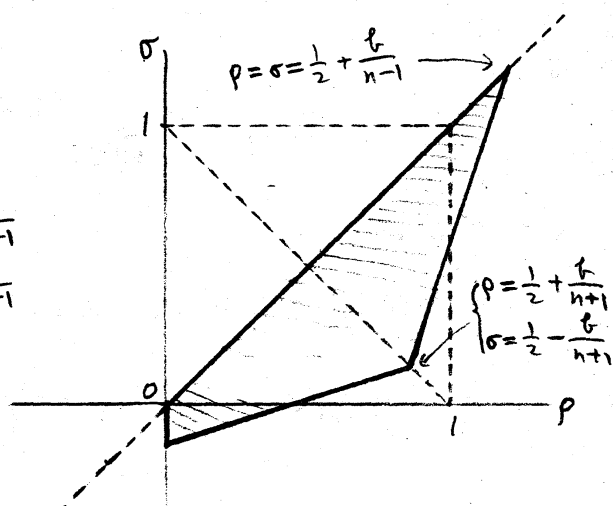


図2.  $\frac{n-1}{2} < t \leq \frac{n+1}{2}$  のとき

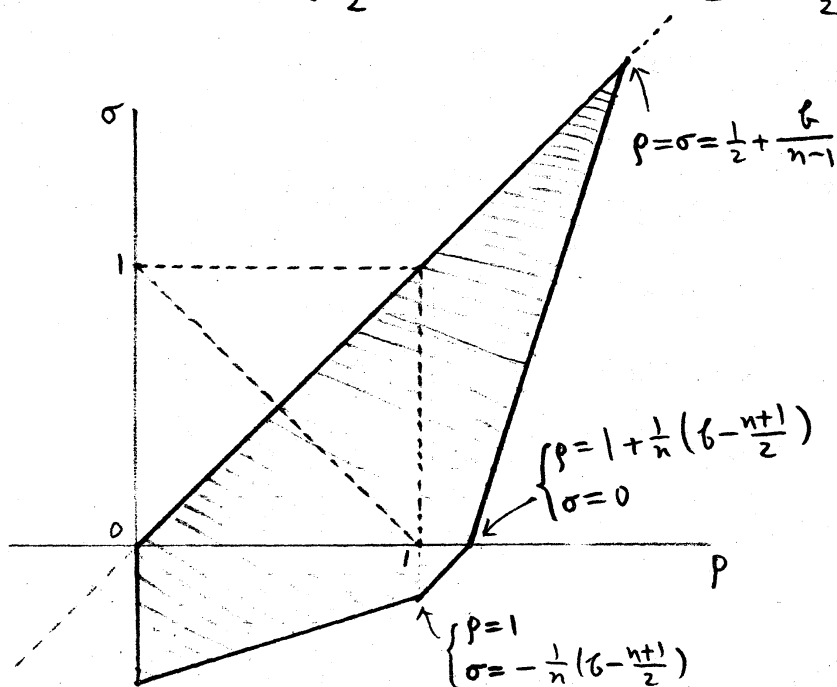


図3.  $t > \frac{n+1}{2}$  のとき.

更に,  $L^1, L^\infty$  および  $C^R$  に属しては, 次の  $\alpha = t$  が言える.

(i)  $S_t: L^1 \rightarrow L^1, L^\infty \rightarrow L^\infty \iff t > \frac{n-1}{2}.$

(ii)  $S_t: L^1 \rightarrow L^\infty \iff t > \frac{n+1}{2}.$

(iii)  $S_{\frac{n+1}{2}}: L^1 \rightarrow BMO, H^1 \rightarrow L^\infty.$

(iv)  $\sigma > \frac{n+1}{2}$ ,  $p - \sigma = 1 + \frac{1}{n}(\sigma - \frac{n+1}{2})$ ,  $1 \leq p \leq 1 + \frac{1}{n}(\sigma - \frac{n+1}{2})$ ,  
 $-\sigma$ : 整数,  $n$  のとき  $S_\sigma: H^{\frac{1}{p}} \rightarrow C^{-\sigma}$ .

$L^1 \subset H^1$ ,  $L^\infty \subset BMO$ ,  $C^k \subset \Lambda_k$  であるから, (i) ~ (iv) は,  $(p, \sigma) \in D_\sigma$  となつてゐる  $(p, \sigma)$  と  $\sigma$  に ついて, ある場合には  $S_\sigma: X_p \rightarrow X_\sigma$  の有界性より強い有界性可言ふことを, 主張したものである。

### §3. 有界性の証明.

§2 の結果のうち肯定的部分は, 次の2つの命題が基礎になる:

命題1.  $0 < \sigma < \infty$  の時  $\frac{1}{p_0} - \frac{1}{2} = \frac{\sigma}{n-1}$  とおくと,

$$S_\sigma: H^{p_0} \rightarrow H^{p_0} \text{ 有界.}$$

命題2.  $0 < \sigma < \frac{n+1}{2}$  のとき

$$S_\sigma: L^{p_1} \rightarrow L^{p_1'}, \quad \frac{1}{p_1} = \frac{1}{2} + \frac{\sigma}{n+1}, \quad \frac{1}{p_1'} = 1 - \frac{1}{p_1}.$$

$\sigma \geq \frac{n+1}{2}$  のとき.

$$S_\sigma: H^{p_2} \rightarrow L^\infty, \quad \frac{1}{p_2} = 1 + \frac{1}{n}(\sigma - \frac{n+1}{2}).$$



命題 1 は,  $p_0 \leq 1$  の時は,  $H^{p_0}$  が アトム分解できること (Latter [6]) と,  $H^{p_0}$  の ノルムが Riesz 変換を用いて  $L^{p_0}$  ノルムに帰着できることを用いて,  $p_0$ -atom と呼ばれる関数  $f$  に対して,

$$\|S_{\theta} f\|_{p_0} \leq C$$

を示すことに帰着される。この評価の証明は, Hölder の不等式と Plancherel の定理だけを用いておこなえる。詳しくは [8]。ただしこの評価のために  $K_{\theta}$  の挙動を知ることが必要だが, それは次の様である:

補題 1. 
$$\begin{cases} K_{\theta} \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n \setminus \{|x|=1\}) \\ \forall \theta \in \mathbb{R} \begin{cases} |x| \rightarrow \infty \text{ のとき } \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\alpha} K_{\theta}(x) = O(|x|^{-N}) \quad (\forall N, \forall \alpha). \end{cases} \end{cases}$$

$\theta < \frac{n+1}{2} + |\alpha|$  のとき

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\alpha} K_{\theta}(x) &= \text{const. } x^{\alpha} (1-|x|+i0)^{\theta-|\alpha|-\frac{n+1}{2}} \\ &\quad + o(|1-|x||^{\theta-|\alpha|-\frac{n+1}{2}}) \quad \text{as } |x| \rightarrow 1. \end{aligned}$$

$\theta = \frac{n+1}{2}$  のとき

$$K_{\theta}(x) = \text{const. } \log(1-|x|+i0) + O(1) \quad \text{as } |x| \rightarrow 1.$$

$p_0 > 1$  のときの命題 1 は, 補題 1 によって証明できる。す

なやち,  $0 \leq \operatorname{Re} z \leq 1$  なる  $z \in \mathbb{C}$  に対して作用素  $T_z$  を

$$T_z = [\psi(z)|z|^{-\frac{n-1}{2}} e^{i|z|}]$$

とおくと,  $p_0 = 1$  のときの結果を用いて

$$T_{1+iy}: H^1 \rightarrow H^1, \quad \|T_{1+iy}\|_{H^1 \rightarrow H^1} \leq C(1+|y|)^N,$$

また

$$T_{iy}: L^2 \rightarrow L^2, \quad \|T_{iy}\|_{L^2 \rightarrow L^2} \leq C$$

であるから,  $0 < \theta < 1$  の  $\theta$  について,

$$T_\theta: H^p \rightarrow H^p, \quad \frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{1} + \frac{\theta}{2}.$$

(Calderón-Torchinsky [2] II, pp. 151~152) により,  $1 < p_0 < 2$  の場合の命題 1 の結果に他ならない。

命題 2 の証明. まず補題 1 によって,

$$K_{\frac{n+1}{2}}(x) = \log |1-x| + (\text{odd. function})$$

だから,  $K_{\frac{n+1}{2}} \in \text{BMO}$  である (このことは John-Nirenberg の [4] にある  $\log |x| \in \text{BMO}$  の証明と同じ方法で証明できる)。

故に,  $S_{\frac{n+1}{2}}: L^1 \rightarrow \text{BMO}$  であり, Fefferman の不等式

$$\left| \int f(x)g(x)dx \right| \leq C \|f\|_{H^1} \|g\|_{\text{BMO}}$$

により,  $S_{\frac{n+1}{2}}: H^1 \rightarrow L^\infty$  も言える。  $0 < \sigma < \frac{n+1}{2}$  のとき

の  $L^p \rightarrow L^p$  有界性は, 命題 1 の証明のときと同様の補局定理

を用いて証明される。  $\sigma > \frac{n+1}{2}$  のときには,

$$S_\sigma = S_{\frac{n+1}{2}} [|\cdot|^{-(\sigma - \frac{n+1}{2})}]$$

と分解して,

$$[|\xi|^{-(6-\frac{n+1}{2})}] : H^{p_2} \rightarrow H^1$$

(fractional integral, Calderón-Torchinsky [2] II, p. 162) と

$$S_{\frac{n+1}{2}} : H^1 \rightarrow L^\infty$$

とを合成して  $S_6 : H^{p_2} \rightarrow L^\infty$  の有界性かわかる。

$S_6 : L^p \rightarrow \Lambda_\alpha$  の有界性は, 双対性を利用して  $S_6 : H^q \rightarrow L^{p'}$  ( $p' = p/(p-1)$ ,  $\alpha = \frac{n}{q} - n$ ) の有界性から導くことができる。簡単のため  $0 < \alpha < 1$  とする。Taibleson [11] によると,  $\Lambda_\alpha$  のノルムは,

$$\|f\|_{\Lambda_\alpha} = \|f\|_{L^\infty} + \sup \frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|^\alpha}$$

である。よって,

$$\|f\|_{\tilde{\Lambda}_\alpha} = \sup |f(x) - f(y)|/|x-y|^\alpha$$

とおく。Meyer の定理 ([7]) によれば,

$$(2) \quad \|f\|_{\tilde{\Lambda}_\alpha} = \sup_{I: \text{cube}} \inf_{c \in \mathbb{C}} \frac{1}{|I|^{1+\alpha/n}} \int_I |f(x) - c| dx$$

である。双対性  $(L^1)' = L^\infty$  によつて

$$(3) \quad \inf_{c \in \mathbb{C}} \frac{1}{|I|^{1+\alpha/n}} \int_I |f(x) - c| dx = \sup \left| \int_I f(x) g(x) dx \right|,$$

ただし右辺の  $\sup$  は,  $\text{support } g \subset I$ ,  $\|g\|_{L^\infty} \leq |I|^{-1-\alpha/n}$  かつ  $\int g(x) dx = 0$  なる  $g$  を動かしてとる。(2) と (3) から,

$$(4) \quad \|f\|_{\tilde{\Lambda}_\alpha} = \sup \left| \int f(x)g(x)dx \right|$$

ただし右辺の  $\sup$  は, ある cube  $I$  に対して前記の条件をみたす  $g$  全体にわたって ( $I$  も動かして) とる, すなわち,  $g \in \mathcal{A} = \mathcal{H}_\alpha - \mathcal{H}$  なる族としたとき,  $g$  は  $g$ -atom の全体を動かすことにある。さて, (4) を用いると,

$$(5) \quad S_\delta: L^p \rightarrow \tilde{\Lambda}_\alpha \iff \left| \int S_\delta f \cdot g \right| \leq C \text{ for } \|f\|_p \leq 1, g: g\text{-atom}$$

であるが, 実は

$$\int S_\delta f \cdot g = \int f \cdot S_\delta g$$

なのであるから,

$$(5) \text{ の右辺 } \iff \|S_\delta g\|_{L^{p'}} \leq C \text{ for } g: g\text{-atom.}$$

$H^\alpha$  が原子分解であることによると, これは  $S_\delta$  の  $H^\alpha \rightarrow L^{p'}$  の有界性と同等である。このようにして,

$$(6) \quad S_\delta: L^p \rightarrow \tilde{\Lambda}_\alpha \iff S_\delta: H^\alpha \rightarrow L^{p'}$$

がわかった。命題 1 と 2 の結果ふたつをよめるを補内した結果は, 適当な  $q \leq 1$ ,  $p' \geq 1$  について  $S_\delta: H^\alpha \rightarrow L^{p'}$  の有界性を教えてくれるから, (6) に従って  $S_\delta: L^p \rightarrow \tilde{\Lambda}_\alpha$  の有界性が得られる。  $S_\delta: L^p \rightarrow L^\infty$  の有界性は,  $K_\delta \in L^{p'}$  を見るこ

とによって容易にわかるから,  $S_\sigma: L^p \rightarrow \tilde{\Lambda}_\alpha$  とおいて

$S_\sigma: L^p \rightarrow \Lambda_\alpha$  が言える。

以上のようにして  $D_\sigma$  の端点の  $(p, \sigma)$  について  $S_\sigma: X_p \rightarrow X_\sigma$  の有界性は示して証明できる。その他の  $(p, \sigma) \in D_\sigma$  については補内定理で示される。

(i) は, 補題 1 を使って  $K_\sigma \in L^1, \sigma > \frac{n-1}{2}$ , を見ることによってわかる。(ii) は, やはり補題 1 を使って  $K_\sigma \in L^\infty, \sigma > \frac{n+1}{2}$ , を見ることによってわかる。(iii) は命題 2 で示した。(iv) は,

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha S_\sigma f &= [\xi^\alpha \psi(\xi) |\xi|^{-\sigma} e^{i|\xi|}] f \\ &= [\psi(\xi) |\xi|^{-\sigma+|\alpha|} e^{i|\xi|}] [\xi^\alpha / |\xi|^{|\alpha|}] f \\ &= S_{\sigma-|\alpha|} [\xi^\alpha / |\xi|^{|\alpha|}] f, \end{aligned}$$

$$[\xi^\alpha / |\xi|^{|\alpha|}]: H^p \rightarrow H^p \text{ 有界, } 0 < p < \infty,$$

から,  $S_\sigma: H^p \rightarrow C^k$  か,  $S_{\sigma-k}: H^p \rightarrow L^\infty$  に帰着される = によって, 命題 2 から導かれる。

#### §4. 非有界性の証明

$(p, \sigma) \notin D_\sigma$  なる  $(p, \sigma)$  について  $S_\sigma: X_p \rightarrow X_\sigma$  の証明。

(i) 一般に平行移動と可換な線型作用素  $T$  について, も

$$\|Tf\|_{H^q} \leq C \|f\|_{H^p}, \quad 0 < q < p < \infty \quad \text{ならば実は } T=0$$

である。このことの証明は、Hörmander [5] による  $q > 1$  の場合の証明 ([5] p. 96) と同様に行われる。

$$(ii) \quad S_b: H^p \rightarrow H^q \quad \text{if} \quad \frac{1}{q} - \frac{n}{p} < -b - \frac{n-1}{2}.$$

これは、

$$b - \frac{n+1}{2} + \frac{1}{q} < \lambda < \frac{n}{p} - n$$

なる  $\lambda$  をとると、

$$f = \mathcal{F}^{-1}(\chi(\xi) |\xi|^\lambda) \in H^p \quad \text{かつ} \quad S_b f \notin H^q$$

からわかる。

$$(iii) \quad S_b: H^p \rightarrow \Lambda_\alpha \quad \text{if} \quad \frac{n}{p} - n > b - \frac{n+1}{2} - \alpha.$$

このことは、 $0 < \alpha < 1$  からは

$$b - \frac{n+1}{2} - \alpha < \lambda < \frac{n}{p} - n$$

なる  $\lambda$  をとって

$$f = \mathcal{F}^{-1}(\chi(\xi) |\xi|^\lambda) \in H^p \quad \text{かつ} \quad S_b f \notin \Lambda_\alpha$$

からわかる。作用素  $[(1+|\xi|^2)^{-\lambda/2}]$  が  $\Lambda_\alpha \rightarrow \Lambda_{\alpha+\beta}$  の onto の isomorphism であること (Taibleson [11] Theorem 6, p. 437) を用いると、実は

$$(7) \quad S_b: X_p \rightarrow \Lambda_\alpha \iff S_{b+\beta}: X_p \rightarrow \Lambda_{\alpha+\beta}$$

がわかるから、 $\alpha \geq 1$  の場合は  $0 < \alpha < 1$  の場合に帰着できる。

$$(iv) \quad S_b: L^p \rightarrow \Lambda_\alpha \quad \text{if} \quad \frac{1}{p} + \alpha > b - \frac{n-1}{2}$$

これは、双対性 (§3 の (6)) を用いて (ii) に帰着できる。

$$\S 5. \quad S_\sigma: \Lambda_\alpha \longrightarrow \Lambda_\beta.$$

= の節では  $\alpha, \beta, \sigma$  はすべて実数 (負でもよい) とする。

命題 3.  $S_\sigma: \Lambda_\alpha \longrightarrow \Lambda_{\alpha+\sigma-\frac{n-1}{2}}$  有界.

$$S_\sigma: \Lambda_\alpha \not\rightarrow \Lambda_\beta \text{ if } \beta > \alpha + \sigma - \frac{n-1}{2}.$$

証明. § 4 の (7) に よつて,

$$(8) \quad S_{\frac{n-1}{2}}: \Lambda_\alpha \longrightarrow \Lambda_\alpha$$

$$(9) \quad S_{\frac{n-1}{2}}: \Lambda_\alpha \not\rightarrow \Lambda_\beta \text{ if } \beta > \alpha$$

を示せばよい。まず (8) を示す。Taibleson [11] (II, Theorem 2, p. 27) により,  $K_{\frac{n-1}{2}} \in \Lambda(0; 1, \infty)$  を示せばよい。Taibleson による  $\Lambda(0; 1, \infty)$  の定義に従うと,  $[(1+|z|^2)^{-\beta/2}] K_{\frac{n-1}{2}} \in L^1$ ,  $\beta > 0$ , と, 十分大なる  $\beta$  に ついて

$$(10) \quad \left\| \left[ y^k \left( \frac{\partial}{\partial y} \right)^k e^{-y|z|^2} \right] K_{\frac{n-1}{2}} \right\|_{L^1} \leq C, \quad 0 < y \leq 1$$

を示せばよい。最初の条件は補題 1 を用いて容易に示せる。2番目の条件を確かめるために, 次の補題を用いる。

補題 2.  $\varphi^{(j)} \in \mathcal{S}$ ,  $j=1, \dots, m$ , は次の条件を満たすとする:

ある:

$$\forall \xi \neq 0, \exists t > 0; \sum_{j=1}^m |\xi_j \varphi^{(j)}(t\xi)| \neq 0.$$

$f$  は Fourier 変換  $\hat{f}$  が原点の近傍で  $L^1_{loc}$  であるような緩増加超関数とする。十分大きな数  $M$  と定数  $C$  があり

$$(11) \quad \sum_{j=1}^m \left\| f * (s^{-n} \varphi^{(j)}(\frac{\cdot}{s})) \right\|_{L^1} \leq \begin{cases} C, & 0 < s \leq 1 \\ C s^M, & s > 1 \end{cases}$$

が成り立つば, 十分大きな  $k$  に対して (10) が成り立つ。

この補題は, 関数  $\hat{f}^{-1}(\eta^k (\frac{\partial}{\partial \eta})^k e^{-\eta|z|^2}) \in s^{-n} \varphi^{(j)}(\frac{\cdot}{s})$  の合成積による重ね合わせとしてあるから (その方法は Fefferman-Stein の [3] p185 にあるテクニックによる) によって証明できる。

さて, 補題 2 によると (10) を示すのに, 適当な  $\mathcal{S}$  の関数  $f$  と  $f = K_{\frac{n-1}{2}}$  に対して (11) を示せばよい。  $\varphi^{(j)}$  としてコンパクトな台をもつ  $\int \varphi^{(j)}(x) dx = 0$  とするものにとると  $f = K_{\frac{n-1}{2}}$  に対する (11) は, 命題 1 の  $p_0 \leq 1$  の時の証明 (Miyachi [8] の Theorem 1 の証明) と同様の計算でできる。

(9) は,

$$f = \hat{f}^{-1}(\psi(z)|z|^{-\frac{n+1}{2}-\alpha} e^{-i|z|^2}) \in \Lambda_\alpha,$$

$$S_{\frac{n-1}{2}} f = \hat{f}^{-1}(\psi(z)|z|^{-n-\alpha}) \notin \Lambda_\beta \quad \text{if } \beta > \alpha$$

からわかる。または, 次のようにして (9) を示してもよい。

もしも  $S_{\frac{n-1}{2}} : \Lambda_\alpha \rightarrow \Lambda_\beta$ ,  $\beta > \alpha$ , ならば,



$$S_{\frac{n-1}{2}} = [(1+|z|^2)^{\alpha/2}] S_{\frac{n-1}{2}} [(1+|z|^2)^{-\alpha/2}]$$

と考へて,  $S_{\frac{n-1}{2}}: \Lambda_0 \rightarrow \Lambda_{\beta-\alpha}$ , 従つて ( $L^\infty \subset \Lambda_0$  から)  $S_{\frac{n-1}{2}}: L^\infty \rightarrow \Lambda_{\beta-\alpha}$ ,  $\beta-\alpha > 0$ . §3 の (6) によつて dual をとつて  $S_{\frac{n-1}{2}}: H^p \rightarrow L^1$ ,  $p < 1$ ; しかしこれは §4 の (ii) と矛盾する. 故に  $S_{\frac{n-1}{2}}: \Lambda_\alpha \rightarrow \Lambda_\beta$ ,  $\beta > \alpha$ .

### §6. NOTE

以上の結果は,  $S_\phi$  のかわりに

$$[\psi(z)|z|^{-\phi} \sin|z|] \text{ や } [\psi(z)|z|^{-\phi} \cos|z|]$$

に対しても成り立つ。また  $\phi(z)$  を,  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  で定義される 1 次斉次関数で,  $\phi(z) > 0$  かつ曲面  $\{z \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \mid \phi(z) = 1\}$  の Gauss 曲率が 0 になるような関数とし,  $a(z), b(z)$  をどちらか一方は恒等的に零でない  $-\phi$  次の斉次関数とすると,

$$[\psi(z)(a(z)e^{i\phi(z)} + b(z)e^{-i\phi(z)})]$$

についても, 同様の結果が成り立つ。(Cf. Mizuhara [8].)

命題 1 の証明は,  $p_0 \geq 1$  の場合は, Peral の [9] にもあるが, アトム分解を利用したこゝでの証明法は, 簡単でしかも融通性に富み, かつ  $p_0 < 1$  にも適用できる利点を持つ。

命題2の前半の結果は, Strichartz [10] によって知られていた。こゝでの BMO を用いる証明法は [10] のものより簡単でかつ融通性に富む。  $L^p-L^{p'}$  有界性の証明法には, Brenner [1] による Littlewood-Paley の定理に基づいた方法もある。

#### References

- [1] Brenner, P., On  $L^p-L^{p'}$  estimates for the wave-equation, Math. Z. 145(1975), 251-254.
- [2] Calderón, A. P., and Torchinsky, A., Parabolic maximal functions associated with a distribution, I, Advances in Math. 16 (1975), 1-64; II, 24(1977), 101-171.
- [3] Fefferman, E. M., and Stein, E. M.,  $H^p$  spaces of several variables, Acta Math. 129(1972), 137-193.
- [4] John, F., and Nirenberg, L., On functions of bounded mean oscillation, Comm. Pure Appl. Math. 14(1961), 415-426.
- [5] Hörmander, L., Estimates for translation invariant operators in  $L^p$  spaces, Acta Math. 104(1960), 93-140.
- [6] Latter, R. H., A characterization of  $H^p(\mathbf{R}^n)$  in terms of atoms, Studia Math. 62(1978), 93-101.
- [7] Meyer, N. G., Mean oscillation over cubes and Hölder continuity, Proc. Amer. Math. Soc. 15(1964), 717-721.
- [8] Miyachi, A., On some estimates for the wave equation in  $L^p$  and  $H^p$ , to appear in J. Fac. Sci. Univ. Tokyo.

- [9] Peral, J. C.,  $L^p$  estimates for the wave equation, to appear in J. Func. Anal.
- [10] Strichartz, R. S., Convolution with kernels having singularities on a sphere, Trans. Amer. Math. Soc. 148(1970), 461-471.
- [11] Taibleson, M. H., On the theory of Lipschitz spaces of distributions on Euclidean n-space, I, J. Math. Mech. 13(1964), 407-479; II, 14(1965), 821-839; III, 15(1966), 973-981.